

Geometria I

6 settembre 2011

Esercizio 1. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + y + kz = 2k - 1 \\ x + ky + z = k \end{cases},$$

al variare di k parametro reale.

Esercizio 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
- Si dica se la matrice A è diagonalizzabile e, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita come segue:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1.$$

Indicata con $q(x_1, x_2, x_3)$ la forma quadratica associata alla forma bilineare f e interpretate $[(x_1, x_2, x_3)]$ come coordinate proiettive omogenee in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

- studiare la conica \mathcal{C} di equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$; [Circonferenza di centro $(1; 0)$ e raggio $\sqrt{3}$]
- scrivere l'equazione del fascio \mathcal{F} di coniche tangenti a \mathcal{C} nei punti in cui essa incontra l'asse y . [$(k+1)x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$]

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano α di equazione

$$\alpha : 5x - 2y - 6z + 2 = 0$$

e due rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 6y = 8 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s : \begin{cases} x = k + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases},$$

Determinare, al variare di k , parametro reale:

- (a) i valori di k per i quali le rette r ed s sono incidenti; [$k = 3$]
- (b) un'equazione cartesiana del piano π parallelo sia a r sia a s e passante per il punto $P = (0; 0; 2)$; [$3x + 4y + 7z - 14 = 0$]
- (c) le equazioni cartesiane della retta t ortogonale alla retta r , parallela al piano α e passante per il punto P .
- $$\left[\begin{array}{l} 13x - y = 0 \\ 7x + 2z - 4 = 0 \end{array} \right]$$